

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания
для самостоятельной работы студентов 2 курса

г. Ростов-на-Дону

2025

Дифференциальные уравнения: Методические указания для самостоятельной работы студентов 2 курса.

Приведены краткие теоретические сведения и примеры выполнения заданий.

Предназначены для студентов заочной формы обучения.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением (ДУ) 1-го порядка называется уравнение вида:

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

связывающее независимую переменную x , неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее первую производную y' . Здесь $f(x, y)$ — некоторая заданная функция своих аргументов, определенная и непрерывная в области D на плоскости $ХОУ$. Область D называется областью определения уравнения (ООУ).

Функция $y = \varphi(x)$, определенная и дифференцируемая на некотором интервале (a, b) , называется *решением уравнения (1)*, если, будучи подставленной в это уравнение, она обращает его в тождество, т. е. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, при $x \in (a, b)$. График решения ДУ называется *интегральной кривой*.

ДУ (1) имеет бесчисленное множество решений вида $y = \varphi(x, C)$, зависящих от одной произвольной постоянной C . Такое решение называется *общим решением ДУ*. Решение ДУ (1), которое получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при фиксированном значении C , называется *частным решением*.

Не всегда решение ДУ (1) находится в виде $y = \varphi(x)$, иногда оно получается в неявном виде $\hat{O}(x, y) = 0$, при этом для всех x и y из некоторой

области должно выполняться — $\frac{\hat{O}'_x(x, y)}{\hat{O}'_y(x, y)} = f(x, y)$. Решение $\hat{O}(x, y) = 0$

называют *интегралом ДУ (1)*, а уравнение $\hat{O}(x, y, C) = 0$ называется *общим*

интегралом ДУ (1) в некоторой области $G \in D$, если при надлежащем выборе постоянной C оно дает любое решение ДУ (1), график которого содержится в области G .

Нахождение всех решений ДУ называется *интегрированием* уравнения.

Рассмотрим методы интегрирования основных типов ДУ 1-го порядка.

Уравнения с разделяющимися переменными

ДУ с разделяющимися переменными имеют вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (2)$$

и решаются следующим образом: так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то уравнение (2) можно

записать в виде $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Разделим переменные в полученном равенстве, т. е. при дифференциале dy соберем множителями функции, зависящие от y , а при дифференциале dx — функции, зависящие от x . Для этого умножим обе части уравнения (2) на множитель $\frac{dx}{f_2(y)}$, считая, $f_2(y) \neq 0$. Символически это записывается так:

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Получим $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Интегрируя последнее равенство, получим

общий интеграл
$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

В случае, если уравнение $f_2(y) = 0$ имеет решение $y = b$, которое не получается из общего решения ни при каком значении постоянной C , то $y = b$ является особым решением уравнения (2).

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Найти общее решение дифференциального уравнения:

Пример

$$xy' = 1 - x^2$$

Решение

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$xy \frac{dy}{dx} = 1 - x^2$$

$$ydy = \frac{1-x^2}{x} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \pm \sqrt{\ln x^2 - x^2 + C}$$

Пример

$$\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0$$

Решение

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$$

$$y = \pm \sqrt{1 - \arcsin x - C}$$

Пример

$$y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$$

Решение

$$y' + \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{y}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{y}{2} - \sin \frac{y}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$y' = -2 \sin \frac{y}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin \frac{y}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{\sin \frac{y}{2}} = -2 \cos \frac{x}{2} dx$$

$$2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{4} \right| = -4 \sin \frac{x}{2} + C$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{y}{4} = e^{-4 \sin \frac{x}{2} + C}$$

Найти частные решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие начальным условиям

Пример

$$y' \sin x = y \ln y; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$$

Решение

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y$$

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

$$\ln \ln |y| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

$$\ln |y| = C \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$y = e^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \text{общее решение}$$

$$e = e^C \quad C = 1$$

$$y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \text{частное решение}$$

Пример

$$\sin y \cos dy = \cos y \sin x dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

Решение

$$\frac{\sin y}{\cos y} dy = \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$-\ln |\cos y| = -\ln |\cos x| + \ln C$$

$$\cos y = \frac{\cos x}{C} - \text{общее решение}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{C}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{C} \quad C = \sqrt{2}$$

$$\cos y = \frac{\cos x}{\sqrt{2}} - \text{частное решение}$$

Пример 1.1. Найти общее решение ДУ $\sqrt[4]{x} \cdot y' = y + 1$.

Решение. ДУ приведем к виду (2), разделив обе части равенства на $\sqrt[4]{x}$:

$$y' = \frac{y+1}{\sqrt[4]{x}}, \quad \text{ООО} \quad x \neq 0.$$

Согласно описанному выше алгоритму, заменив y' на $\frac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{\sqrt[4]{x}} \text{ и умножим обе части равенства на } \frac{dx}{y+1} (y+1 \neq 0):$$

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}. \quad (3)$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \left| \frac{u=y+1}{du=dy} \right| = \int \frac{du}{u} = \left| \frac{\hat{o} \hat{i} \check{o} \hat{i} \acute{o} \check{e} \grave{a} 4}{\grave{o} \grave{a} \acute{a} \check{e} \grave{e} \ddot{o} \hat{u}} \right| = \ln|u| + C = \ln|y+1| + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \left| \frac{\hat{o} \hat{i} \check{o} \hat{i} \acute{o} \check{e} \grave{a} 3}{\grave{o} \grave{a} \acute{a} \check{e} \grave{e} \ddot{o} \hat{u}} \right| = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + C.$$

Вернемся к равенству (3), оставив константу C только в правой части в виде $\ln|C_1|$:

$$\ln|y+1| = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + \ln C_1.$$

Используя свойства логарифмов, получим: $y+1 = C_1 e^{\frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow y = C_1 e^{\frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}}} - 1$ — общее решение исходного ДУ.

Однородные уравнения

Однородные ДУ 1-го порядка имеют вид:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4)$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены $y = zx$, где $z = z(x)$. Действительно, подставляя в уравнение (4) $y' = z'x + z$, получаем: $z'x + z = f(z)$ — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dz}{dx} x = f(z) - z, \quad f(z) - z \neq 0, \quad x \neq 0$$

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + C.$$

После вычисления интеграла вместо z нужно подставить $\frac{y}{x}$ и, если можно, упростить полученное выражение.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция $f(x, y)$ называется однородной относительно переменных x и y , если при умножении всех переменных на какое-либо число t функция

получает множителем некоторую степень t , т.е. если $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$. Число m называется показателем однородности.

Например, функции

$$x^2 - 3xy + y^2,$$

$$\sqrt{xy} - x + \frac{y}{x},$$

$$\arctg \frac{y}{x} \quad \text{будут однородными;}$$

показатель однородности первой функции равен 2, второй – 1, а третьей – 0.

Найти общее решение уравнений:

Пример

$$x dy - x dx = y dy$$

Решение

$$(x - y) dy = x dx$$

$$(x - y) y' = x$$

$$y = tx$$

$$y' = t + xt'$$

$$(x - tx)(t + xt') = x$$

$$(1 - t)(t + xt') = 1$$

$$xt' = \frac{1}{1 - t} - t$$

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t}$$

$$\frac{(1 - t) dt}{t^2 - t + 1} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$-\frac{1}{2} \ln(t^2 - t + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} = \ln|x| + C$$

$$\frac{2}{3} \arctg \frac{\frac{2}{x} - 1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1 \right) = \ln|x| + C$$

$$\frac{2}{3} \arctg \frac{2y - x}{\sqrt{3}x} - \ln \sqrt{\frac{y^2 - xy + x^2}{x^2}} = \ln|x| + C$$

$$\frac{2}{3} \arctg \frac{2y - x}{\sqrt{3}x} = \ln \sqrt{y^2 - xy + x^2} + C \quad \text{общее решение.}$$

Пример

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

Решение

$$y = tx$$

$$y' = t + xt'$$

$$t + xt' = \frac{tx}{x} + \frac{x}{tx}$$

$$xt' = \frac{1}{t}$$

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}$$

$$t dt = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{t^2}{2} = \ln|x| + C$$

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$$

$$y^2 = x^2 \ln x^2 + 2Cx^2 - \text{общее решение}$$

Пример

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

Решение

$$y = tx$$

$$y' = t + xt'$$

$$x(t + xt') = tx \ln \frac{tx}{x}$$

$$t + xt' = t \ln t$$

$$x \frac{dt}{dx} = t \ln t - t$$

$$\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln|t|-1| = \ln|x| + \ln C$$

$$\ln|t|-1 = Cx$$

$$\ln \frac{y}{x} = Cx + 1$$

$$\ln|y| = \ln|x| + Cx + 1$$

$$y = e^{\ln|x| + Cx + 1} - \text{общее решение}$$

Найти частое решение уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям

Пример

$$y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}; \quad y(1) = 1$$

Решение

$$y = tx$$

$$y' = t + xt'$$

$$t + xt' = \frac{t^2 x^2 - 2xtx - x^2}{t^2 x^2 + 2xtx - x^2}$$

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{t^2 - 2t - 1}{t^2 + 2t - 1} - t$$

$$x \frac{dt}{dx} = -\frac{(t+1)(t^2+1)}{t^2+2t-1}$$

$$\frac{t^2+2t-1}{(t+1)(t^2+1)} dt = -\frac{dx}{x}$$

$$\left(-\frac{1}{t+1} + \frac{2t}{t^2+1}\right) dt = -\frac{dx}{x}$$

$$-\ln|t+1| + \ln(t^2+1) = -\ln|x| + \ln C$$

$$\frac{t^2+1}{t+1} = \frac{C}{x}$$

$$\frac{\frac{y^2}{x^2} + 1}{\frac{y}{x} + 1} = \frac{C}{x}$$

$$\frac{y^2 + x^2}{y + x} = C$$

общее решение

$$y^2 + x^2 = C(y + x)$$

$$1+1 = C(1+1)$$

$$C = 1$$

частное решение

$$y^2 + x^2 = y + x$$

Пример 1.2. Найти общее решение ДУ

$$xy' = y + \frac{x}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Решение. Разделим уравнение на $x \neq 0$ и получим: $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$ —

однородное уравнение вида (4) в котором $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Делаем замену $y = z \cdot x$, $z' = z'x + z$. Тогда исходное уравнение становится уравнением с разделяющимися переменными:

$$z' \cdot x + z = z + \frac{1}{\ln z}, \quad \frac{dz}{dx} x = \frac{1}{\ln z}$$

$$\ln z dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \ln z dz = \int \frac{dx}{x}$$

Найдем интегралы в левой и правой частях полученного равенства:

$$\int \ln z dz = \left. \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du, \\ u = \ln z \rightarrow du = \frac{dz}{z} \\ dv = dz \rightarrow v = z \end{array} \right| = z \ln z - \int z \frac{dz}{z} = z \ln z - z + C.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{l} \text{ô î ð ò ó ë à 4} \\ \text{ò à á ë è ö û} \\ \text{è í ò ä ð à è î â} \end{array} \right| = \ln |x| + C.$$

Итак, получим:

$$z \ln z - z = \ln |x| + C \Rightarrow \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = \ln |x| + C \text{ — общий интеграл исходного ДУ.}$$

Линейные уравнения

Линейные ДУ 1-го порядка имеют вид:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \quad (5)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции, непрерывные на некотором интервале.

Такие уравнения обычно решают методом Бернулли, который состоит в следующем. Решение ищется в виде произведения двух функций $y(x) = U(x)V(x)$. Тогда $y' = U'V + UV'$. Подставляя y и y' в (5), получим:

$$U'V + UV' + p(x)UV = q(x).$$

Объединим второе и третье слагаемые в левой части последнего уравнения, вынося U за скобки, и получим:

$$U'V + U(V' + p(x)V) = q(x). \quad (6)$$

Поскольку одну неизвестную функцию y заменили двумя функциями U и V , то одну из этих функций можем взять произвольно. Выберем функцию $V(x)$ так, чтобы она была решением уравнения

$$V' + p(x)V = 0, \quad (7)$$

тогда вторая функция $U(x)$ должна удовлетворять уравнению $U'V = q(x)$. (8)

Решив уравнение с разделяющимися переменными (7), найдем V и подставим его в (8), откуда найдем U . Общее решение получим как произведение найденных функций U и V :

$$y = UV.$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Найти общие решения уравнений

Пример

$$y' + 2y = 4x$$

Решение

$$\text{Здесь } P(x) = 2; \quad Q(x) = 4x$$

$$y = uv$$

$$y' = u'v + v'u$$

$$u'v + v'u + 2uv = 4x$$

$$u'v + u(v' + 2v) = 4x$$

Находим v из однородного уравнения

$$v + 2v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -2x$$

$$dv = -2x dx$$

$$v = -x^2$$

Для отыскания u получим уравнение

$$-u'x^2 = 4x$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{4}{x}$$

$$du = -4 \frac{dx}{x}$$

$$u = -4 \ln|x| + C$$

общее решение уравнения:

$$y = x^2(\ln x^4 - C)$$

Пример

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$$

Решение

$$P(x) = \frac{1-2x}{x^2}; \quad Q(x) = 1$$

$$y = uv$$

$$y' = u'v + v'u$$

$$v'u + u'v + \frac{1-2x}{x^2} uv = 1$$

$$v'u + v \left(u' + \frac{1-2x}{x^2} u \right) = 1$$

Находим $u(x)$ из однородного уравнения

$$u' + \frac{1-2x}{x^2} u = 0$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2x-1}{x^2} u$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{2x-1}{x^2} dx$$

$$\ln|u| = \ln x^2 + \frac{1}{x}$$

$$u = e^{\ln x^2 + \frac{1}{x}}$$

$$u = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$v' x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$dv = x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} dx$$

$$v = e^{-\frac{1}{x}} + C$$

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}} \left(e^{-\frac{1}{x}} + C \right)$$

Пример

$$2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$$

Решение $2y + (y^2 - 6x)y' = 0$

Данное уравнение не является линейным относительно y и y' , но является таковым относительно x и x' . Учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$, приведем уравнение к

виду:

$$2yx' + y^2 - 6x = 0$$

$$x' - \frac{3x}{y} = -\frac{y}{2}$$

$$x = uv$$

$$x' = u'v + uv'$$

$$P(y) = -\frac{1}{y}; \quad Q(y) = -\frac{y}{2}$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{3}{y}v\right) = -\frac{y}{2}$$

$$v' - \frac{3}{y}v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dy}{y}$$

$$\ln|v| = 3\ln|y|$$

$$v = y^3$$

$$u'y^3 = -\frac{y}{2}$$

$$du = -\frac{1}{2}y^{-2}dy$$

$$u = \frac{1}{2y} + C$$

$$x = y^3\left(\frac{1}{2y} + C\right) - \text{общее решение дифференциального уравнения}$$

Пример

$$y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$$

Решение

Данное уравнение не является линейным относительно y и y' , но является таковым относительно x и x' . Учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$, приведем уравнение к

виду:

$$x' + \frac{x}{y} = 1 + 2 \ln y$$

$$x = uv; \quad x' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{y} = 1 + 2 \ln y$$

$$uv' + v\left(u' + \frac{u}{y}\right) = 1 + 2 \ln y$$

$$u' + \frac{u}{y} = 0$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}$$

$$\ln|u| = -\ln|y|$$

$$u = \frac{1}{y}$$

$$v' \frac{1}{y} = 1 + 2 \ln y$$

$$dv = (y + y \ln y^2) dy$$

$$v = \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} \ln y^2 - \frac{y^2}{2} + C$$

$$v = y^2 \ln y + C$$

$xy = y^2 \ln y + C$ - общее решение дифференциального уравнения.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

Пример

$$xy' + y - e^x = 0; \quad y(a) = b$$

Решение

$$y = uv$$

$$y' = u'v + v'u$$

$$xu'v + xv'u + uv - e^x = 0$$

$$xu'v + u(xv' + v) - e^x = 0$$

$$xv' + v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$v = \frac{1}{x}$$

$$u' - e^x = 0$$

$$du = e^x dx$$

$$u = e^x + C$$

$$y = \frac{1}{x}(e^x + C) \text{ - общее решение дифференциального уравнения.}$$

$$b = \frac{1}{a}(e^a + C)$$

$$C = ab - e^a$$

$$y = \frac{1}{x}(e^x + ab - e^a) \text{ - частное решение дифференциального уравнения.}$$

Пример

$$xy' - \frac{y}{x+1} = x; \quad y(1) = 0$$

Решение

$$y = uv$$

$$y' = u'v + v'u$$

$$xu'v + xv'u - \frac{uv}{x+1} = x$$

$$xv'u + v\left(xu' - \frac{u}{x+1}\right) = x$$

$$xu' - \frac{u}{x+1} = 0$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} - \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|u| = \ln|x| - \ln|x+1|$$

$$u = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{x^2}{x+1} v' = x$$

$$dv = \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$v = x + \ln|x| + C$$

$$y = \frac{x}{x+1} (x + \ln|x| + C) - \text{общее решение дифференциального уравнения}$$

$$0 = \frac{1}{2}(1 + C)$$

$$C = -1$$

$$y = \frac{x}{x+1} (x + \ln|x| - 1) - \text{частное решение дифференциального уравнения.}$$

Пример 1.3. Найти общее решение ДУ:

$$y' + 2y = e^{-x}$$

Решение. Уравнение имеет вид (5), поэтому является линейным.

Решим его методом Бернулли. Сделаем замену $y = UV$, $y' = U'V + UV'$:

$$U'V + UV' + 2UV = e^{-x},$$

$$U'V + U(V' + 2V) = e^{-x}.$$

Приравняем коэффициент при U к нулю и получим:
$$\begin{cases} V' + 2V = 0, \\ U'V = e^{-x}. \end{cases}$$

Решим первое из полученных уравнений:

$$\frac{dV}{dx} = -2V \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = -2 \int dx \Rightarrow \ln|V| = -2x \Rightarrow V = e^{-2x} \quad (\text{при интегрировании})$$

использовали формулы 4 и 2 таблицы интегралов). При нахождении V постоянную C полагаем равной нулю, так как в данном случае достаточно найти некоторое решение.

Полученную функцию $V = e^{-2x}$ подставим во второе уравнение:

$U' e^{-2x} = e^{-x} \Rightarrow U' = e^x \Rightarrow \frac{dU}{dx} = e^x \Rightarrow \int dU = \int e^x dx \Rightarrow U = e^x + C$ (использовали формулы 2 и 7 таблицы интегралов).

Таким образом, $y = UV = (e^x + C)e^{-2x}$ или $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$ — общее решение исходного ДУ.

Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли имеют вид:

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \quad (9)$$

где $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

Метод решения таких уравнений тот же, что и для линейных уравнений.

Уравнение Бернулли

Найти общее решение дифференциального уравнения

Пример

$$y' + xy = xy^3$$

Решение

$$y' + xy = xy^3$$

$$y = uv; \quad y' = u'v + v'u$$

$$u'v + v'u + xuv = xu^3v^3$$

$$u'v + u(v' + xv) = xu^3v^3$$

$$v' + xv = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -x dx$$

$$\ln|v| = -\frac{x^2}{2}$$

$$v = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$u'e^{-\frac{x^2}{2}} = xu^3e^{-\frac{3x^2}{2}}$$

$$\frac{du}{u^3} = xe^{-x^2} dx$$

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{e^{x^2}} - C$$

$$u = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1 - Ce^{x^2}}}$$

$y = \frac{1}{\sqrt{1 - Ce^{x^2}}}$ - общее решение дифференциального уравнения.

Пример

$$y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$$

Решение

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'$$

$$vu + u'v + \frac{uv}{x+1} + u^2v^2 = 0$$

$$v'u + v\left(u' + \frac{u}{x+1}\right) + u^2v^2 = 0$$

$$u' + \frac{u}{x+1} = 0$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|u| = -\ln|x+1|$$

$$u = \frac{1}{x+1}$$

$$v' \frac{1}{x+1} + \frac{v^2}{(x+1)^2} = 0$$

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{dx}{x+1}$$

$$\frac{1}{v} = \ln|x+1| - C$$

$$v = \frac{1}{\ln|x+1| - C}$$

$y = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| - C)}$ - общее решение дифференциального уравнения.

Пример

$$xy' + y = xy^2 \ln x$$

Решение

$$y = uv$$

$$y' = uv' + vu'$$

$$xuv' + xvu' + uv = xu^2v^2 \ln x$$

$$xuv' + v(xu' + u) = xu^2v^2 \ln x$$

$$xu' + u = 0$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = -\ln|x|$$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$v' = \frac{1}{x^2} v^2 \ln x$$

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$-\frac{1}{v} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$v = \frac{x}{\ln x + 1 - Cx}$$

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 - Cx} \text{ - общее решение дифференциального уравнения}$$

Пример

$$(1-x^2)y' - xy - xy^2 = 0$$

Решение

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'$$

$$(1-x^2)u'v + (1-x^2)uv' - xuv - xu^2v^2 = 0$$

$$(1-x^2)u'v + u[(1-x^2)v' - xv] - xu^2v^2 = 0$$

$$(1-x^2)v' - xv = 0$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{x dx}{1-x^2}$$

$$\ln|v| = -\frac{1}{2} \ln|1-x^2|$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2}u' - \frac{x}{1-x^2}u^2 = 0$$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{x dx}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - C$$

$$u = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-C\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \frac{1}{1-C\sqrt{1-x^2}} \text{ - общее решение дифференциального уравнения}$$

Пример

$$y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$$

Решение

$$y = uv$$

$$y' = uv' + u'v$$

$$uv' + u'v - uv \operatorname{tg} x + u^2 v^2 \cos x = 0$$

$$uv' + v(u' - u \operatorname{tg} x) + u^2 v^2 \cos x = 0$$

$$u' - u \operatorname{tg} x = 0$$

$$\frac{du}{u} = \operatorname{tg} x dx$$

$$\ln|u| = -\ln|\cos x|$$

$$u = \frac{1}{\cos x}$$

$$v' + v^2 = 0$$

$$\frac{dv}{v^2} = -dx$$

$$\frac{1}{v} = x + C$$

$$v = \frac{1}{x + C}$$

$$y = \frac{1}{(x + C)\cos x} \text{ - общее решение дифференциального уравнения}$$

Пример 1.4. Найти общее решение ДУ:

$$x y' + 2y = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

Решение. Разделим уравнение на $x \neq 0$ ($x = 0$ не является решением данного ДУ):

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{x \cos^2 x}.$$

Полученное уравнение имеет вид (9), следовательно, это уравнение Бернулли. Сделаем замену $y = UV$, $y' = U'V + UV'$. Получим:

$$U'V + UV' + \frac{2UV}{x} = \frac{2\sqrt{UV}}{x \cos^2 x},$$

$$U'V + U\left(V' + \frac{2V}{x}\right) = \frac{2\sqrt{UV}}{x \cos^2 x}.$$

Приравняем коэффициент при U нулю и получим:
$$\begin{cases} V' + \frac{2V}{x} = 0, \\ U'V = \frac{2\sqrt{UV}}{x \cos^2 x}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{2V}{x} \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = -2 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|V| = -2 \ln|x| \Rightarrow V = x^{-2} \Rightarrow V = \frac{1}{x^2}$$

Подставим полученную функцию V во второе уравнение:

$$U' \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2\sqrt{U}}{x \cos^2 x} \Rightarrow \frac{U'}{x^2} = \frac{2\sqrt{U}}{x^2 \cos^2 x} \Rightarrow U' = \frac{2\sqrt{U}}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{dU}{dx} = \frac{2\sqrt{U}}{\cos^2 x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dU}{\sqrt{U}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow \sqrt{U} = \operatorname{tg} x + C \Rightarrow U = (\operatorname{tg} x + C)^2$$

(использовали формулы 3а и 9 таблицы интегралов).

Таким образом, общее решение ДУ:

$$y = \frac{(\operatorname{tg} x + C)^2}{x^2}.$$

Случай $V = 0$ и $\Rightarrow y = 0$ является решением ДУ, и так как оно не может быть получено из общего решения, то является особым решением.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Задача Коши для ДУ 1-го порядка состоит в следующем: из общего решения $y = \varphi(x, C)$ требуется выделить такое решение $y = \varphi(x, C_0)$ уравнения (1), которое удовлетворяет начальному условию: $\varphi(x_0) = y_0$, где (x_0, y_0) — заданная точка плоскости XOY .

Пример 1.5. Определить тип ДУ и решить задачу Коши

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0, \quad y(3) = 4.$$

Решение. Для определения типа ДУ выразим из уравнения y' :

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad (x \neq 0).$$

Внесем x под знак корня, возведя его в квадрат:

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}$$

и в подкоренном выражении поделим почленно числитель на знаменатель, получим

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (10)$$

Итак, привели уравнение к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. По таблице ДУ (см. прил. 2)

определяем, что уравнение однородное и решается заменой $z = \frac{y}{x}$, $y = zx$,

$y' = z'x + z$. Сделаем замену в уравнении (10): $z'x + z = z + \sqrt{1+z^2}$, учтем, что

$$Z' = \frac{dZ}{dx} \Rightarrow \frac{dZ}{dx} x = \sqrt{1+Z^2}, \frac{dZ}{\sqrt{1+Z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Используя формулы 12 и 4 таблицы интегралов, получаем:

$$\ln|z + \sqrt{1+z^2}| = \ln|x| + \ln C.$$

Произвольную постоянную интегрирования выразили в виде $\ln C$, что позволило записать общее решение, используя свойства логарифмов, в виде:

$$z + \sqrt{1+z^2} = Cx.$$

Учитывая выполненную замену $z = \frac{y}{x}$, получим $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = xC$ —

общее решение ДУ в неявном виде.

Найдем такое решение, которое удовлетворяет начальному условию $y(3) = 4$. Для этого подставим в общее решение $x = 3$, $y = 4$ и найдем значение постоянной C :

$$\frac{4}{3} + \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = 3C \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3C \Rightarrow 3 = 3C \Rightarrow C = 1.$$

Итак, нашли значение постоянной C , при котором решение ДУ будет удовлетворять указанному начальному условию.

Решение задачи Коши запишем, подставив в общее решение значение постоянной C :

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = x.$$

Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее первую и вторую производные. В общем случае такое уравнение имеет вид:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (11)$$

Общее решение уравнения (11) должно содержать две произвольные постоянные, т. е. иметь вид $y = \varphi(x, C_1, C_2)$. Задача Коши для ДУ 2-го порядка формулируется таким образом: найти такое решение уравнения, которое удовлетворяло бы условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где x_0, y_0, y'_0 — заданные числа.

Уравнения, допускающие понижение порядка

Основным способом интегрирования ДУ (11) является понижение порядка. Рассмотрим один из случаев, когда это возможно. Если уравнение (11) имеет вид:

$$y'' = f(x), \quad (12)$$

т. е. правая часть не содержит y и y' , то ДУ решаются двукратным последовательным интегрированием: $y = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2$.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение степени

Пример

$$y'' - y' \operatorname{ctg} x = 2x \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Решение

Данное дифференциальное уравнение второго порядка не содержит явно искомую функцию y , т.е. имеет вид $F(x, y', y'') = 0$

Положим $y' = p$, тогда $y'' = p'$.

$$p' - p \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$$

$$p = uv$$

$$p' = u'v + v'u$$

$$u'v + uv' - uv \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$$

$$u'v + u(v' - v \operatorname{ctg} x) = 2x \sin x$$

$$v' - v \operatorname{ctg} x = 0$$

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x dx$$

$$\ln|v| = \ln|\sin x|$$

$$v = \sin x$$

$$u' = 2x$$

$$du = 2x dx$$

$$u = x^2 + C_1$$

$$p = (x^2 + C_1) \sin x$$

$$y' = (x^2 + C_1) \sin x$$

$$dy = (x^2 + C_1) \sin x dx$$

$y = 2 \cos x + 2x \sin x - (x^2 + C_1) \cos x + C_2$ - общее решение дифференциального уравнения

$$\begin{cases} 0 = \left(\frac{\pi^2}{16} + C_1 \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 = - \left(\frac{\pi^2}{16} + C_1 \right) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \left(\frac{\pi^2}{16} + C_1 \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 = - \left(\frac{\pi^2}{16} + C_1 \right) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + C_2 \end{cases}$$

$$C_1 = -\frac{\pi^2}{16}; \quad C_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right)$$

$$y_{u.p.} = 2x \sin x + 1 - \frac{\pi + 4}{4} \sqrt{2} - \left(x^2 - \frac{\pi^2}{16} - 2 \right) \cos x - \text{частное решение}$$

дифференциального уравнения

Пример

$$y'' + \operatorname{tg} y = 2(y')^2; \quad y(1) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(1) = -2$$

Решение

Данное дифференциальное уравнение не содержит в явном виде аргумента x , т.е. имеет вид $F(y, y', y'') = 0$. Примем в качестве независимой переменной y и выполним замену $y' = p = p(y)$. Тогда $y'' = p \cdot p'$, а исходное уравнение принимает вид: $p \cdot p' \operatorname{tg} y = 2p^2$.

$$\frac{dp}{p} = 2 \frac{\cos y}{\sin y} dy$$

$$\ln|p| = 2 \ln|\sin y| + \ln|C_1|$$

$$p = C_1 \sin^2 y$$

$$y' = C_1 \sin^2 y$$

$$\frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx$$

$-\operatorname{ctg} y = C_1 x + C_2$ - общее решение дифференциального уравнения

$$\begin{cases} -2 = C_1 \sin^2 \frac{\pi}{4} & C_1 = -4 \\ -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = C_1 + C_2 & C_2 = 3 \end{cases}$$

$$y = \operatorname{arccctg}(-C_1 x - C_2)$$

$y_{ч.р.} = \operatorname{arccctg}(4x - 3)$ - частное решение дифференциального уравнения.

Пример 2.1. Решить задачу Коши: $y'' = \cos^2 2x$, $y(0) = \frac{1}{16}$, $y'(0) = 1$.

Решение. Найдем сначала y' :

$$\begin{aligned} y' &= \int \cos^2 2x dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + C_1. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, получим } y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C_1. \quad (13)$$

Найдем y интегрированием уравнения (13):

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C_1 \right) dx = \frac{1}{2} \int x dx + \frac{1}{8} \int \sin 4x dx + \\ &+ C_1 \int dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{32} \cos 4x + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Получим общее решение:

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{32} \cos 4x + C_1 x + C_2. \quad (14)$$

Найдем константы C_1 и C_2 , подставив начальные данные $x = 0$,

$y = \frac{1}{16}$, $y' = 1$ в формулы (13) и (14):

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{8} \sin 4 \cdot 0 + C_1, \\ \frac{1}{16} = \frac{0^2}{4} - \frac{1}{32} \cos 4 \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2. \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = C_1, \\ \frac{1}{16} = -\frac{1}{32} + C_2. \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = \frac{3}{32}. \end{cases}$$

Итак, решение задачи Коши:

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{32} \cos 4x + x + \frac{3}{32}.$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейные однородные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0, \quad (15)$$

где p_1 и p_2 — действительные числа.

Согласно теореме о структуре общего решения линейного однородного ДУ достаточно найти два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (15), чтобы записать общее решение:

$$y_{00}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Будем искать решение уравнения (15) в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ — некоторое постоянное. Чтобы определить λ , подставим y, y', y'' в уравнение (15). В результате подстановки получим уравнение $e^{\lambda x}(\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2) = 0$.

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0. \quad (16)$$

Квадратное уравнение (16) называют *характеристическим уравнением* для ДУ (15), а его корни λ_1 и λ_2 *характеристическими числами*. При решении характеристического уравнения (16) могут возникнуть три случая:

а) Корни λ_1 и λ_2 действительные и различные. Тогда общее решение уравнения (15) будет иметь вид:

$$y_{00} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (17)$$

б) Корни λ_1 и λ_2 действительные и равные, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Общее решение уравнения (15) будет иметь вид:

$$y_{00} = e^{\lambda x} (C_1 + C_2 x). \quad (18)$$

в) Корни λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные, $\lambda_{1,2} = a \pm ib$. Тогда общее решение уравнения (15) примет вид:

$$y_{00} = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \quad (19)$$

Пример 2.2. Найти общие решения линейных однородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

а) $4y'' + 9y' + 2y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$;

в) $y'' - 2y' + 17y = 0$; г) $y'' + 1,69y = 0$;

Решение.

а) $4y'' + 9y' + 2y = 0$. Составим характеристическое уравнение:

$$4\lambda^2 + 9\lambda + 2 = 0.$$

Решим его, используя формулу корней квадратного уравнения:

$$a\lambda^2 + b\lambda + C = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (20)$$

Получим корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{-9 \pm 7}{8};$$

$$\lambda_1 = \frac{-9-7}{8} = -2, \quad \lambda_2 = \frac{-9+7}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Поскольку $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение запишем в виде (17):

$$y_{00} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-\frac{x}{4}}.$$

б) $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0,$$

его корни найдем по формулам (20):

$$\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = 5.$$

Поскольку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in R$, то общее решение запишем в виде (18):

$$y_{00} = e^{5x} (C_1 + C_2 x).$$

в) $y'' - 2y' + 17y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 17 = 0,$$

его корни найдем по формуле (20):

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{2 \pm 8i}{2} = 1 \pm 4i.$$

Получим комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, где $a=1$, $b=4$.

Решение запишем в виде (19):

$$y_{00} = e^x (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

г) $y'' + 1,69y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 1,69 = 0.$$

Решим его:

$$\lambda^2 = -1,69; \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-1,69}; \quad \lambda_{1,2} = \pm 1,3i.$$

$\lambda_{1,2}$ — комплексно сопряженные корни вида $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, где $a = 0$, $b = 1,3$.

Решение запишем в виде (19), при этом учтем, что $e^0 = 1$:

$$y_{00} = C_1 \cos 1,3x + C_2 \sin 1,3x.$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейные неоднородные ДУ 2-го порядка имеют вид:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x). \quad (21)$$

Здесь $f(x)$ — известная функция, непрерывная на некотором промежутке.

Согласно теореме о структуре общего решения линейного неоднородного ДУ общее решение ДУ (21) $y_{oi}(x)$ есть сумма общего решения $y_{oo}(x)$ соответствующего однородного уравнения (15) и любого частного решения $y_{\div i}(x)$ неоднородного уравнения (21), т. е.

$$y_{oi}(x) = y_{oo}(x) + y_{\div i}(x). \quad (22)$$

Рассмотрим, в каком виде можно искать частное решение $y_{\text{ч}}(x)$ ДУ (21), когда правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид.

Пусть λ_1 и λ_2 корни характеристического уравнения (16), а правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (23)$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ — многочлены от x степеней n и m соответственно с известными коэффициентами.

Тогда частное решение $y_{\text{ч}}$ следует искать в виде:

$$y_{\text{ч}} = x^k e^{\alpha x} (R_l(x) \cos \beta x + S_l(x) \sin \beta x), \quad (24)$$

где k — кратность корня $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения:

$$k = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \pm i\beta \text{ — корни характеристического уравнения;} \\ 1, & \text{если } \alpha \pm i\beta \text{ — корни характеристического уравнения;} \\ 2, & \text{если } \alpha \pm i\beta \text{ — корни характеристического уравнения;} \end{cases} \quad (\beta \neq 0).$$

При этом $R_l(x), S_l(x)$ — многочлены от x степени $l = \max\{n, m\}$ с некоторыми, пока неизвестными, коэффициентами. Неизвестные коэффициенты многочленов $R_l(x)$ и $S_l(x)$ находят методом неопределенных коэффициентов.

Пример 2.3. Найти общее решение линейных неоднородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\text{а) } y'' - 4y' = \sin 4x; \quad \text{б) } y'' - y' - 2y = e^{-x}(x+2).$$

Решение.

$$\text{а) } y'' - 4y' = \sin 4x.$$

Найдем общее решение соответствующего однородного ДУ:

$$y'' - 4y' = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4.$$

Поскольку $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение запишем в виде (17), при этом учтем, что $e^0 = 1$:

$$y_{00} = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения $f(x) = \sin 4x$.

Сравнивая ее с видом (23) $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$, заключаем, что $\alpha = 0$, $\beta = 4$, $n = 0$, $m = 0$. Определим параметры частного решения (24). Учитывая, что $\alpha = 0$, а $\beta = 4$, получим, что $\alpha \pm i\beta = \pm 4i$ — не является корнем характеристического уравнения, поскольку корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$. Следовательно, $k = 0$. Найдем $l = \max\{0, 0\} = 0$. Следовательно, порядок многочленов R и S равен 0, т. е. $R_0 = A$, а $S_0 = B$, где A и B — некоторые неизвестные пока коэффициенты. Подставив полученные параметры в $y_{\pm i} = x^k e^{\alpha x} (R_l(x) \cos \beta x + S_l(x) \sin \beta x)$, имеем:

$$y_{\pm i} = x^0 e^0 (R_0 \cos 4x + S_0 \sin 4x) = A \cos 4x + B \sin 4x.$$

Коэффициенты A и B определим из условия, что функция $y_{\text{чп}}$ — решение уравнения и поэтому должна ему удовлетворять. Найдем $y'_{\pm i}$ и $y''_{\pm i}$:

$$\begin{aligned} y'_{\pm i} &= -4A \sin 4x + 4B \cos 4x, \\ y''_{\pm i} &= -16A \cos 4x - 16B \sin 4x \end{aligned}$$

и подставим в исходное уравнение:

$$-16A \cos 4x - 16B \sin 4x + 16A \sin 4x - 16B \cos 4x = \sin 4x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin 4x$ и $\cos 4x$ в правой и левой частях полученного равенства:

$$\begin{aligned} \sin 4x &\left| \begin{aligned} -16B + 16A &= 1, & \Rightarrow 16A + 16A &= 1, & \Rightarrow A &= \frac{1}{32}, \\ -16A - 16B &= 0. & \Rightarrow B &= -A & \Rightarrow B &= -\frac{1}{32}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } y_{\pm i} = \frac{1}{32} \cos 4x - \frac{1}{32} \sin 4x.$$

Тогда согласно (22) общее решение неоднородного ДУ имеет вид:

$$y_{ii} = C_1 + C_2 e^{4x} + \frac{1}{32} \cos 4x - \frac{1}{32} \sin 4x.$$

$$\text{б) } y'' - y' - 2y = e^{-x}(x + 2).$$

Найдем общее решение соответствующего однородного ДУ:

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Найдем его корни по формуле (20):

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2};$$

$$\lambda_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Поскольку $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение запишем в виде (17):

$$y_{00} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения $f(x) = e^{-x}(x+2)$. Сравнивая ее с видом (23)

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad \text{заключаем } \alpha = -1, \beta = 0, n = 1, m = 0.$$

Определим параметры частного решения (24). Учитывая, что $\alpha = -1$, а $\beta = 0$, получим, что $\alpha \pm i\beta = -1$ — однократный корень характеристического уравнения, поскольку корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$. Следовательно, $k = 1$. Найдем $l = \max\{1, 0\} = 1$. Следовательно, порядок многочленов R и S равен 1, т. е. $R_1 = Ax + B$, а $S_1 = Cx + D$, где A, B, C, D — неизвестные коэффициенты. Подставляя полученные параметры в $y_{\pm i} = x^k e^{\alpha x} (R_l(x) \cos \beta x + S_l(x) \sin \beta x)$, имеем:

$$y_{\pm i} = x^1 e^{-x} ((Ax + B) \cos 0 + (Cx + D) \sin 0) = x e^{-x} (Ax + B) = e^{-x} (Ax^2 + Bx).$$

Для определения коэффициентов A и B найдем $y'_{\pm i}$ и $y''_{\pm i}$:

$$y'_{\pm i} = -e^{-x} (Ax^2 + Bx) + e^{-x} (2Ax + B),$$

$$y''_{\pm i} = e^{-x} (Ax^2 + Bx) - e^{-x} (2Ax + B) - e^{-x} (2Ax + B) + e^{-x} 2A =$$

$$= e^{-x} (Ax^2 + Bx) - 2e^{-x} (2Ax + B) + e^{-x} 2A$$

и подставим в исходное уравнение:

$$e^{-x} (Ax^2 + Bx) - 2e^{-x} (2Ax + B) + 2A e^{-x} + e^{-x} (Ax^2 + Bx) -$$

$$- e^{-x} (2Ax + B) - 2e^{-x} (Ax^2 + Bx) = e^{-x} (x + 2).$$

Разделим обе части уравнения на $e^{-x} \neq 0$ и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} -3(2Ax + B) + 2A &= x + 2 \Rightarrow \\ -6Ax - 3B + 2A &= x + 2. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях уравнения:

$$\begin{array}{l|l} x^1 & -6A = 1, \Rightarrow A = -\frac{1}{6}, \\ x^0 & -3B + 2A = 2. \Rightarrow -3B + 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 2 \Rightarrow -3B = \frac{7}{3} \Rightarrow B = -\frac{7}{9}. \end{array}$$

$$\text{Итак, } y_{\text{и}} = e^{-x} \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{9}x \right).$$

Тогда согласно (22) общее решение неоднородного ДУ имеет вид:

$$y_{\text{oi}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + e^{-x} \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{9}x \right).$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица основных интегралов

$$1. \int 0 du = C; \quad C = \text{const};$$

$$2. \int du = u + C;$$

$$3. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \quad \alpha \neq -1;$$

$$3a. \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$$

$$4. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$$

$$5. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$$

$$6. \int e^u du = e^u + C;$$

$$7. \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$8. \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$9. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$$

$$10. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$$

$$11. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$12. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$13. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C;$$

$$15. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$$

$$16. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$17. \int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C;$$

$$18. \int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C;$$

$$19. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$

Приложение 2

Типы дифференциальных уравнений первого порядка

Тип уравнения	Характерные признаки	Методы интегрирования
Уравнения с разделяющимися переменными $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$	Правая часть уравнения представляет собой произведение двух функций, одна зависит от x , другая — от y	Разделить переменные, т. е. уравнение привести к виду $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$ и проинтегрировать
Однородное уравнение $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Правая часть уравнения — функция только от отношения переменных y/x	Уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки: $y = zx$, $y' = z'x + z$
Линейное уравнение $y' + p(x)y = q(x)$	y и y' входят в уравнение только в первой степени	Решается с помощью подстановки: $y = UV$, $y' = U'V + UV'$
Уравнение Бернулли $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$	y' входит в уравнение только линейно, а y в одном из слагаемых линейно, а в другом в степени α , где $\alpha \neq 1$ и $\alpha \neq 0$	Решается методом Бернулли с помощью подстановки: $y = UV$, $y' = U'V + UV'$